KEEMIA ÜLESANNETE LAHENDAMINE II

ÜHIKANALÜÜS II

Füüsikalise Suuruse Dimensioon

Füüsikalise suuruse dimensioon on avaldis astmes üksikliikme kujul, mis koosneb erinevates astmetes põhisuuruste sümbolite korrutisest ja kajastab antud füüsikalise suuruse seost füüsikaliste suurustega, mis peetakse antud süsteemis põhisuurusteks, nagu näiteks $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{N}$ ja $\mathbf{J}$ süsteemis SI.

Suhteliselt lai tähistus! Jõuame selgusele näidete abil, milledes suuruse dimensiooni tähistame dim.

Selleks et leida füüsikalise suuruse tuletise dimensiooni mingis suuruste süsteemis, ütleme SI, on vaja selle suuruse võrrandi paremasse poolde asetada suuruste tähistuste asemel nende dimensioonid. Nii näiteks pannes ruumala määratlevasse võrrandisse $V = l^3$ l asemel dimensiooni $\mathbf{L}$, saame

$$\dim V = \mathbf{L}^3$$

Asetades tihedust määratlevasse võrrandisse $\rho = \frac{m}{V}$ m asemel dimensiooni $\mathbf{M}$ ja V asemel ruumala dimensiooni $\mathbf{L}^3$, saame

$$\dim \rho = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}^3} = \mathbf{ML}^{-3}$$

Teine näide füüsikast. Asetades ühtlase liikumise kiirust määratlevasse võrrandisse $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ $\mathrm{d}s$ asemel pikkuse dimensiooni $\mathbf{L}$ ja $\mathrm{d}t$ asemel aja dimensiooni $\mathbf{T}$, saame

$$\dim v = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{T}} = \mathbf{LT}^{-1}$$

Asetades kiirendust määratlevasse võrrandisse $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ $\mathrm{d}t$ asemel dimensiooni $\mathbf{T}$ ja $\mathrm{d}v$ asemel ülal leitud kiiruse dimensiooni $\mathbf{LT}^{-1}$, saame

$$\dim a = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{T}^{-1}}{\mathbf{T}} = \mathbf{LT}^{-2}$$

Teades kiirenduse dimensiooni, jõu määratleva võrrandi $F = ma$ järgi, saame

$$\dim F = \mathbf{MLT}^{-2} = \mathbf{LMT}^{-2}$$

Jõu dimensiooni teadmine võimaldab leida töö, võimsuse jne dimensioone.

Iga mehhaanilise suuruse tuletise dimensiooni **LMT** suuruste süsteemis saab väljendada astmete rea abil:

$$\dim x = \mathbf{L}^{\alpha}\mathbf{M}^{\beta}\mathbf{T}^{\gamma}$$

Enamus keemiliste suuruste tuletiste dimensioone **LMTIΘNJ** suuruste süsteemis võib olla väljendatud astmelise rea abil:

$$\dim y = \mathbf{L}^{\alpha}\mathbf{M}^{\beta}\mathbf{T}^{\gamma}\mathbf{N}^{\xi}$$

Füüsikalise suuruse dimensiooni üldkuju ühikute süsteemis, mis on ülesehitatud seitsme põhisuuruse peal (pikkus, mass, aeg, voolutugevus, temperatuur, valgustugevus, ainehulk), võib olla väljendatud valemi abil

$$\dim z = \mathbf{L}^{\alpha}\mathbf{M}^{\beta}\mathbf{T}^{\gamma}\mathbf{I}^{\delta}\Theta^{\varepsilon}\mathbf{N}^{\xi}\mathbf{J}^{\eta}$$

kus α, β, γ, ... on *dimensiooni näitajad.*

Dimensiooniga saab läbiviia korrutamis, jagamis, astmesse tõstmise ja juurimise tehteid. Liitmis ja lahutus tehed ei oma mõtet.

- Füüsikalise suuruse **dimensiooni näitaja** on astmenäitaja, millesse on tõstetud põhisuuruse dimensioon, mis kuulub füüsikalise suuruse tuletise dimensiooni.
- Füüsikalise suuruse dimesiooni näitajad võivad omada erinevaid väärtusi: täis- või murdarvulisi, positiivseid või negatiivseid. Mõned tuletatud antud suuruse näitajad võivad olla võrdelised nulliga.
- **Dimensiooniline füüsikaline suurus** on füüsikaline suurus, mille dimensioonis on vähemalt üks füüsikaline suurus mitte nullindas astmes.
- **Dimensioonita füüsikaline suurus** on füüsikaline suurus, mille dimensioonis põhisuurused on nullindas astmes.
- Dimensioonita suurusteks on need suurused, mis on võrdelised kahe samalaadse suuruse suhtega.

Dimensioonide ja mõõtühikute analüüs

Keemia ja füüsika valemid kajastavad looduse seaduseid; täheliste sümbolite all mõistetakse füüsikalisi suuruseid. Nendevahelisi seoseid tehakse kindlaks tavaliselt katselisel teel. Näiteks me võime eksperimentaalselt kindlaks teha, et keha kiirendus on võrdeline jõuga, mis mõjub kehale, ja pöördvõrdeline massiga $a \propto F$, $a \propto m^{-1}$. Jälgitavate seoste põhjal võime pakkuda loetletud suuruste vahelist võrrandit: $a = k \cdot \frac{F}{m}$, kus k on proportsionaalsuskoefitsient. Tihtipeale on proportsionaalsuskoefitsient suurustevahelises võrrandis dimentsioonita ühik. Ja meie juhus $k = 1$, seega $a = \frac{F}{m}$, või $F = ma$ (ühte Newtoni seadustest kajastav võrrand).

Suurustevahelise võrrandi näiteks, kus proportionaalsuskoefitsient ei võrdu ühega, on kineetilise energia valem E_{kin}:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot mv^2$$

Proportsionaalsuskoefitsiendi dimensioon (näiteks gaasikonstandi R) määratakse lähtudes nõudlusest, et erinevate füüsikalisi suurusteid siduva võrrandi parema ja vasaku poolte dimensioonid peavad molema ühesugused.

Seda nõudlust kasutades on võimalik ilma raskusteta leida füüsikaliste suuruste vahelisi seoseid nende dimensioonide kaudu. Sellist lähenemist nimetatakse dimensioonide analüüsiks. Proovime seda kasutada.

Ülesanne 1

Suures ruumis võib temperatuuri mõõta gaastermomeetri abil. Selle eesmärgiga täideti klaastoru ruumalaga 80 ml lämmastikuga temperatuuril 20 °C ja rõhul 1,00 atm. Seejärel viidi toru aeglaselt ja ettevaatlikult soojemasse ruumi. Tänu termilisele paisumisele gaas väljus torust ja teda korjati vedeliku abil, mille aururõhk on olematu. Torust väljunud gaasi üldruumala (mõõdeti 20 °C ja 1,00 atm juures) võrdus 3,5 ml. Mitu mooli lämmastiku oli tarvis klaastoru täitmiseks ja milline oli soojema ruumi temperatuur? Gaasikonstant on $R = 0{,}08206\ \frac{\mathrm{L \cdot atm}}{\mathrm{mol \cdot K}}$.

Lahendus:

Oletame, et me ei ole tutvunud gaasiseadustega. Märgime, et ülesande tektsis on mainitud ruumala, rõhk ja temperatuur, samuti on antud mingi konstant R, mille dimensioonist järeldub, et mingis võrrandis on samuti ainehulk n.

R, T ja n korrutis annab dimensiooni [L · atm], järelikult on $pV = nRT$ ideaalgaasi võrrand. Väljendame lämmastiku moolidearvu:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1\ \mathrm{atm} \cdot 0{,}080\ \mathrm{L}}{0{,}08206\ \frac{\mathrm{L \cdot atm}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot \left(20 + 273\right)\mathrm{K}} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol}$$

Torust väljus:

$$\Delta n = \frac{pV}{RT} = \frac{1\ \mathrm{atm} \cdot 0{,}00350\ \mathrm{L}}{0{,}08206\ \frac{\mathrm{L \cdot atm}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot \left(20 + 273\right)\mathrm{K}} = 1{,}5 \cdot 10^{4}\ \mathrm{mol}$$

Soojema ruumi temperatuur:

$$T = \frac{pV}{(n - \Delta n)R} = \frac{1\ \mathrm{atm} \cdot 0{,}0080\ \mathrm{L}}{(3{,}33 - 0{,}15) \cdot 10^{-3}\mathrm{mol} \cdot 0{,}08206\ \frac{\mathrm{L \cdot atm}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot \left(20 + 273\right)\mathrm{K}} = 306\ \mathrm{K} = 33\ °\mathrm{C}$$

Ideaalgaasi võrrand on väga hea näide dimensioonide analüüsiks. Võib täheldada, et suuruste pV ja nRT dimensioon vastab energia dimensioonile $\mathbf{L}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-2}$:

$$\dim pV = \dim p \dim V = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-2})(\mathbf{L}^{3}) = \mathbf{L}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-2}$$

$$\dim nRT = \dim n \cdot \dim R \cdot \dim T = (\mathbf{N}) \cdot (\mathbf{L}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-2}\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\Theta}^{-1}) \cdot (\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{L}^{-2}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-2}$$

või lihtsamalt mõõtühikute kaudu:

$$[\mathrm{Pa}] \cdot \left[\mathrm{m}^{3}\right] = [\mathrm{kPa}] \cdot \left[\mathrm{dm}^{3}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{2}}\right] \cdot \left[\mathrm{m}^{3}\right] = [\mathrm{N \cdot m}] = [\mathrm{J}]$$

$$[\mathrm{mol}] \cdot \left[\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}\right] \cdot [\mathrm{K}] = [\mathrm{J}]$$

Selleks et teada saada gaasikonstandi väärtust $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ ühikutes $\mathrm{L \cdot atm \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ asemel, on vaja mõõtühikud teisendada:

$$[\mathrm{L}]\cdot[\mathrm{atm}] = [\mathrm{L}]\cdot 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{L}}\right]\cdot[\mathrm{atm}]\cdot 101325\left[\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{atm}}\right] = 101{,}325[\mathrm{J}]$$

$R = 8{,}314\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Täpsemat konstandi väärtust on käsitletud allpool.

Lahendame mõningaid lihtsamaid ülesandeid, põhinedes dimensioonide analüüsil, kuid dimensioonide asemel kasutame mõõtühikuid.

Ülesanne 2

Soogaas koosneb 97,7% metaanist, 0,9% etaanist, 0,3% propaanist ja 1,0% lämmastikust. Peale selle soogaas sisaldab suure molekulmassiga süsivesikute jääke. Väävli sisaldus on minimaalne. Arvutustes eeldame, et soogaas koosneb 99,0% metaanist (CH_4) ja 1,0% lämmastikust. Metaani põlemisel eraldub 802 kJ energiat.

Arvutage kui palju metaani on vaja $1\ \mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}$ (3,60 MJ) elektroenergia saamiseks, kui elektrijaama tootlikkus on 30,0%.

Arvutage mitu kuupsentimeetrit soogaasi on vaja $1\ \mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}$ saamiseks suvel (+ 20 °C) ja talvel (− 20 °C).

Lahendus:

Ülesande esimese punkti lahendamiseks on vaja seostada energiat koos $\mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}$. Ülesande tekstis on juba antud teisendamise koefitsient: $1\ \mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}{=}3{,}60\ \mathrm{MJ}$. Ülesande teksti järgi ühest metaani moolist saab 802 kJ energiat Q. Pole raske välja arvutada moolihulga võttes arvesse tootlikkust:

$$n = \frac{E}{Q\cdot\omega} = \frac{3{,}60\cdot 10^6\ \mathrm{J}}{802\ \mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot 0{,}300} = 1{,}50\cdot 10^2\ \mathrm{mol}$$

Teise punkti lahendamiseks on vaja kasutada meile juba tuntud valemit $pV = nRT$. Samuti võtame arvesse soogaasi koostist:

$$V_{+20} = \frac{1{,}50\cdot 10^2\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot(273+20)\mathrm{K}}{100\ \mathrm{kPa}}\cdot\frac{1000\,\mathrm{cm}^3}{\mathrm{dm}^3}\cdot\frac{1}{0{,}990} = 3{,}67\cdot 10^5\,\mathrm{cm}^3$$

$$V_{-20} = \frac{1{,}50\cdot 10^2\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot(273-20)\mathrm{K}}{100\ \mathrm{kPa}}\cdot\frac{1000\,\mathrm{cm}^3}{\mathrm{dm}^3}\cdot\frac{1}{0{,}990} = 3{,}19\cdot 10^5\,\mathrm{cm}^3$$

Võib tekkida loogiline küsimus: kui me ei vaatleks eelmise ülesande lahendust, kust me teaks seda valemit? Tõepoolest valemit teadmata pole võimalik lahendada ülesande teist punkti. Kuid esimest punkti saab ikkagi lahendada!

Ülesanne 3

Naatriumhüdroksiidi on võimalik saada NaCl lahuse elektrolüüsi abil. Selle protsessi tulemusena tekivad vesinik ja kloor. Elektrolüüsi jaoks vajalik pinge on 3,80 V, seejuures saadus voolu järgi on

90,0%. Eeldame, et elektoenergia maksab 1 $\frac{\mathrm{EEK}}{(\mathrm{kW \cdot h})}$. Arvutage välja 1 kg Na OH saamise maksmust. 1 mol (e^-) = 96500 A · s: 1W · h = A · V · 3600 s.

Lahendus:

Ühele elektronile vastab üks naatriumi ioon Na OH-s, seega:

$$\mathrm{EEK} = \frac{1{,}000\ \mathrm{kg}}{40{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} \cdot \frac{96500\ \mathrm{A \cdot s}}{1\ \mathrm{mol}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{W \cdot h}}{3600\ \mathrm{s} \cdot 1000\ \mathrm{A \cdot V}} \cdot \frac{1\ \mathrm{EEK}}{1\ \mathrm{kW \cdot h}} \cdot \frac{3{,}80\ \mathrm{V}}{0{,}900} = 2{,}83\ \mathrm{EEK}$$

Kilogramm ja Avogadro arv

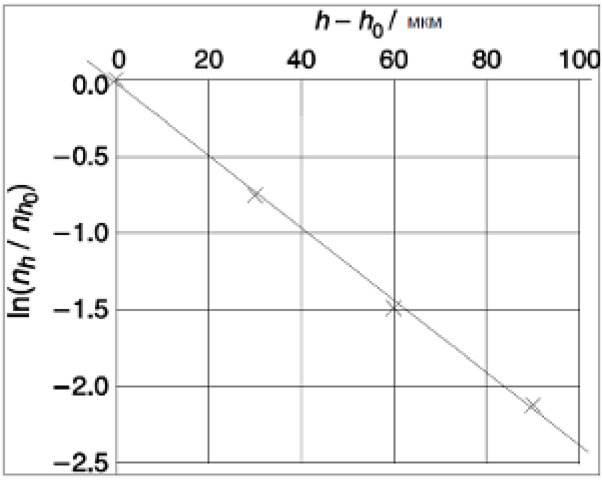
Kilogramm on SI-süsteemi põhiühikute kuuluv mõõtühik, mis võrdub rahvusvahelise massietaloni massiga. Erinevalt kilogrammist teised põhiühikud määratakse fundamentaalfüüsika omaduste ja seaduste abil. Tõenäoliselt hakkatakse ka kilogrammi määrama osakeste arvu kaudu, kui saadakse teada Avogadro arvu piisavalt täpne väärtus: $m = \frac{N}{N_\mathrm{A}} \cdot M$. Järgmises ülesanded on küsitud arvutada N_A väärtus.

Ülesanne 4

Üks esimestest Avogadro arvu määramisest tehti kolloidosakeste vee suspensioonis gravitatsiooni mõjul vertikaaljaotuvuse uuringuga. Eksperimendis suspendeeriti osakesed raadiusega $2{,}12 \cdot 10^{-7}$ m ja tihedusega $1{,}206 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ veekolonnis 15 °C juures. Tasakaalu saavutamisel oli keskmine osakeste arv ruumala ühikus antud kõrgusel kolonni põhjast:

Kõrgus, 10^{-6} m	5	35	65	95
Keskmine osakeste arv ruumala ühikus	4,00	1,88	0,90	0,48

Tasakaalu tingimusel võib osakeste arvu ruumalaühikus erinevatel kõrgustel modelleerida Boltzmanni jaotuse võrrandiga: $\frac{n_h}{n_{h_0}} = \exp\left[-\frac{E_h - E_{h_0}}{RT}\right]$ kus n_h on osakeste arv ruumalaühikus kõrgusel h, n_{h_0} on osakeste arv ruumalaühikus võrdluskõrgusel h_0. E_h on gravitatsiooni potentsiaal energia mooli osakeste kohta kõrgusel h, kolonni põhjas olevate osakeste suhtes, R on gaasikonstant, 8,3145 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$. All on toodud $\ln\left(\frac{n_h}{n_{h_0}}\right)$ vs. $(h - h_0)$ graafik, mis on joonistatud tabeli andmete põhjal. Võrdluskorguseks oli võetud 5 µm kolonni põhjast.



Määrake antud andmete põhjal Avogadro arv.

Lahendus:

$$\frac{n_h}{n_{h_0}} = \exp\left(-\frac{E_h - E_{h_0}}{RT}\right)$$

$$\ln\frac{n_{h_0}}{n_0} = -\frac{E_h - E_0}{RT} = -\frac{mg(h - h_0)}{RT}$$

Tõusunurga võrrand:

$$\sin\alpha = \frac{\ln\frac{n_{h_0}}{n_0}}{h - h_0} = -\frac{mg}{RT} = -\frac{\rho a^3 N_A g}{RT}$$

Oluline on siin kuidas asendada N_A: $E_h = mgh = N_A \rho a^3 gh$. Tihti on Avogadro arv üleminekutegur atomi ühikutelt (osakeste mass) mooliühikutele (aine mass). Siis,

$$N_A = -\frac{RT\sin\alpha}{\rho a^3 g} = \frac{8{,}3145\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\cdot mol}} \cdot 288\ \mathrm{K} \cdot 0{,}024\ \frac{1}{\mu\mathrm{m}} \cdot \frac{10^6\ \mu\mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}}{1{,}206 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (2.12 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m})^3 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 5{,}1 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}$$

Kokkuvõte

Selles kursuse osas me tutvusime paljude definitsioonidega ja vaatlesime arvutusülesannete lahendamist.

Ärge unustage, et ülesannete tekstis sisalduvad peamiselt kõik lahendamiseks vajalikud andmed.