

Кинетика радиоактивного распада.

Реакции распада атомных ядер являются реакциями первого порядка, т.е. количество радиоактивных ядер N изменяется со временем по закону радиоактивного распада (экспоненциально):

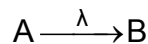
$$N_t = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_t и N_0 – число ядер в моменты времени $T = t$ и $T = 0$ соответственно, а λ – константа распада, имеющая смысл вероятности распада в единицу времени:

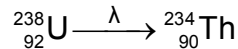
$$-\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = \lambda,$$

где знак минус указывает на то, что количество радиоактивных ядер N уменьшается во времени.

Прямая реакция распада



Примеры:



Уравнение скорости распада в дифференциальном виде имеет вид:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda N_A$$

Если проинтегрировать уравнение, получим:

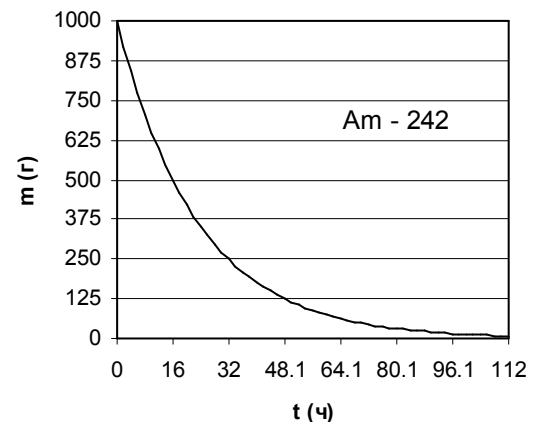
$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} \frac{dN_A}{N_A} = -\int_0^t \lambda dt$$

$$\ln \frac{N_{A,t}}{N_{A,0}} = -\lambda t$$

Взяв экспоненту обеих частей равенства, увидим уже знакомую формулу:

$$N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda t}$$

На графике изображено изменения массы радиоактивного ${}_{95}^{242}\text{Am}$. Видно, что за некоторое



время ($T_{1/2} = 16,02$ ч) масса ${}_{95}^{242}\text{Am}$ уменьшается ровно на половину. Это время называется периодом полураспада. На основе закона радиоактивного распада, найдем отношение периода полураспада к константе распада:

$$N_{T_{1/2}} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{N_{T_{1/2}}}{N_0} = -\lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \ln \frac{N_0}{N_{T_{1/2}}} = \lambda \cdot T_{1/2},$$

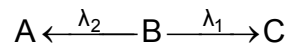
Период полураспада – это время, за которое количество (масса, активность) уменьшается ровно на половину, следовательно:

$$\ln 2 = \lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0,693}{T_{1/2}},$$

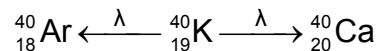
Помимо периода полураспада существует еще одна величина - τ , характеризующая среднее время жизни радиоактивного нуклида:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 T_{1/2}.$$

Параллельные реакции распада



Примеры:



Уравнение в дифференциальном виде имеет вид:

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_B + \lambda_2 N_B$$

или

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda N_B,$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_B = \lambda_1 N_{B,0} e^{-\lambda t} \quad \text{и} \quad \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B = \lambda_2 N_{B,0} e^{-\lambda t}$$

Проинтегрировав уравнения, получим:

$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} dN_A = \lambda_1 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt \quad \text{и} \quad \int_{N_{C,0}}^{N_{C,t}} dN_C = \lambda_2 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

$$N_{A,t} = N_{A,0} + \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t}) \text{ и } N_{C,t} = N_{C,0} + \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t})$$

Как правило, $N_{A,0}$ и $N_{C,0}$ равны нулю, тогда

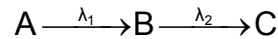
$$N_{A,t} = \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t}) \text{ и } N_{C,t} = \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t})$$

и отношение $N_{A,0}$ к $N_{C,0}$ равно

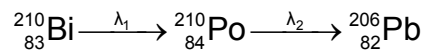
$$\frac{N_{C,t}}{N_{A,t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Согласно этому очень важному результату отношение концентраций продуктов зависит от констант распада и не зависит от времени.

Цепные реакции



Примеры:



Уравнения в дифференциальном виде имеют вид:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_A, \quad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_A - \lambda_2 N_B \text{ и } \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B.$$

Распад А в В – прямая реакция, поэтому

$$N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}$$

Подставляя это уравнение в (2), получим

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_B$$

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}$$

Умножим обе стороны уравнения на $e^{\lambda_2 t}$:

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B \right) e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}$$

Можно математически доказать, что

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B \right) e^{\lambda_2 t} = \frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt}$$

Из последних двух равенств

$$\frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Проинтегрировав уравнение, получим:

$$\int_{N_{B,t}}^{N_{B,0}} dN_B e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} \int_0^t e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt$$

$$N_{B,t} e^{\lambda_2 t} - N_{B,0} e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Разделим обе стороны уравнения на $e^{-\lambda_2 t}$:

$$N_{B,t} - N_{B,0} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1}{e^{\lambda_2 t}} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Если $N_{B,0}$ равно нулю, то уравнение принимает простую форму

$$N_{B,t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Время, за которое количество В достигает своего максимума, соответствует $dN_B/dt = 0$. Подставив полученное уравнение в уравнение

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t},$$

получим

$$0 + \lambda_2 \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\lambda_2 (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_{\max}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_{\max}} = e^{-\lambda_1 t_{\max}} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$e^{\lambda_2 - \lambda_1 t_{\max}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Прологарифмировав результат, получим новую формулу:

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Максимально возможное количество В равняется

$$N_{B,\max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{A,0} e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$N_{B,\max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{A,0} e^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$N_{B,\max} = N_{A,0} \exp\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$$

Если $N_{C,0}$ также равно нулю, то справедливо $N_{A,0} = N_{A,t} + N_{B,t} + N_{C,t}$. Следовательно

$$N_{C,t} = N_{A,0} - \frac{N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t})$$

Очевидно, это уравнение нельзя использовать, если $\lambda_1 = \lambda_2$.