TARTU ÜLIKOOL
teaduskool

Raadiokeemia

Õppevahend TÜ teaduskooli õpilastele
Tartu 2004

Koostanud	Vladislav Ivaništšev
Retsenseerinud	Rein Pullerits
Tõlkija ja keeletoimetaja	Darja Lavõgina

Radioaktiivse lagunemise kineetika

Aatomituumade lagunemisreaktsiooni on esimest järku, st radioaktiivsete tuumade arv N muutub ajas radioaktiivse lagunemise seaduse kohaselt (eksponentsiaalselt):

$$\boxed{N_t = N_0 e^{-\lambda t}},$$

где число ядер в моменты времени соответственно, а константа распада, имеющая смысл вероятности распада в единицу времени:

kus N_t ja N_0 on tuumade arv vastavalt ajahetkel T = t ja T = 0; λ on lagunemise konstant, mis on ekvivalentne radioaktiivse lagunemise ühikkiirusega (ja ka lagunemise tõenäosusega ühikulise aja jooksul):

$$-\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = \lambda,$$

miinusmärk näitab, et radioaktiivsete tuumade arv N väheneb aja jooksul.

Otsene lagunemisreaktsioon

$$A \xrightarrow{\lambda} B$$

Näited:

$$^{238}_{92}U \xrightarrow{\lambda} {}^{234}_{90}Th$$

Lagunemise kiiruse võrrand diferentsiaalsel kujul on:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda N_A$$

Integreerides, saame:

$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} \frac{dN_A}{N_A} = -\int_0^t \lambda dt$$

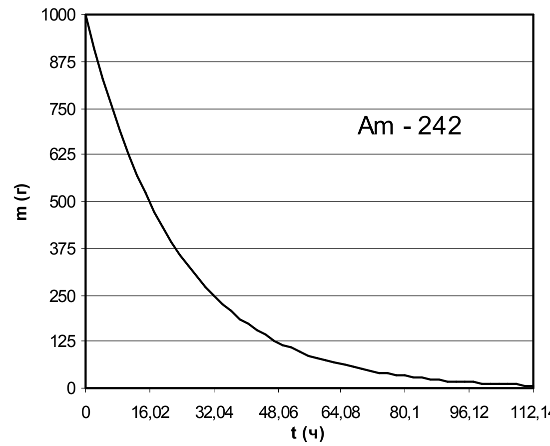
$$\ln \frac{N_{A,t}}{N_{A,0}} = -\lambda t$$

Nüüd võtame eksponenti võrrandi mõlemad pooled ja saame juba tuttava valemi:

$$\boxed{N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda t}}$$

Graafikul on kujutatud radioaktiivse $^{242}_{95}Am$ massi muutumine. On näha, et teatud aja jooksul ($T_{1/2}$ = 16,02 h) väheneb $^{242}_{95}Am$ mass täpselt poole võrra; seda aega nimetatakse poolestusajaks. Radioaktiivse lagunemise seaduse põhjal leiame poolestusaja seost lagunemiskonstandiga:

$$N_{T_{1/2}} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln\frac{N_{T_{1/2}}}{N_0} = -\lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \ln\frac{N_0}{N_{T_{1/2}}} = \lambda \cdot T_{1/2},$$



Kuna poolestusaeg on defineeritud kui aeg, mille jooksul radioaktiivse aine hulk (mass, aktiivsus) väheneb täpselt poole võrra, siis:

$$\boxed{\ln 2 = \lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0,693}{T_{1/2}},}$$

Poolestusaja kõrval eksisteerib veel üks suurus - τ, mis iseloomustab radioaktiivse nukliidi keskmist eksisteerimisaega (eluaega):

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 T_{1/2}.$$

Paralleelsed lagunemisreaktsioonid

$$A \xleftarrow{\lambda_2} B \xrightarrow{\lambda_1} C$$

Näited:

$$^{40}_{18}Ar \xleftarrow{\lambda 1} {}^{40}_{19}K \xrightarrow{\lambda 2} {}^{40}_{20}Ca$$

Lagunemiskiiruse võrrand diferentsiaalsel kujul:

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_B + \lambda_2 N_B$$

ehk

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda N_B,$$

kus $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_B = \lambda_1 N_{B,0} e^{-\lambda t} \text{ и } \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B = \lambda_2 N_{B,0} e^{-\lambda t}$$

Integreerides, saame:

$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} dN_A = \lambda_1 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt \text{ и } \int_{N_{C,0}}^{N_{C,t}} dN_C = \lambda_2 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

$$N_{A,t} = N_{A,0} + \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0}(1 - e^{-\lambda t}) \text{ и } N_{C,t} = N_{C,0} + \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0}(1 - e^{-\lambda t})$$

Reeglina on $N_{A,0}$ ja $N_{C,0}$ võrdsed nulliga, siis:

$$N_{A,t} = \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0}(1 - e^{-\lambda t}) \text{ и } N_{C,t} = \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0}(1 - e^{-\lambda t})$$

$N_{A,0}$ ja $N_{C,0}$ suhe on:

$$\frac{N_{C,t}}{N_{A,t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Vastavalt saadud võrrandile sõltub produktide kontsentratsioonide suhe lagunemiskonstantidest ja ei sõltu ajast (mis on väga oluline!).

Ahelreaktsioonid

$$A \xrightarrow{\lambda_1} B \xrightarrow{\lambda_2} C$$

Näited:

$${}^{210}_{83}Bi \xrightarrow{\lambda_1} {}^{210}_{84}Po \xrightarrow{\lambda_2} {}^{206}_{82}Pb$$

Diferentsiaalsel kujul:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_A \text{ , } \frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_A - \lambda_2 N_B \text{ и } \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B \text{ .}$$

A lagunemine B-ks on otsene reaktsioon, seetõttu:

$$\boxed{N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}}$$

Asendades saadud võrdust võrrandisse (2), saame:

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_B$$

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled $e^{\lambda_2 t}$ -ga:

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B\right)e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}$$

Matemaatiliselt võib tõestada, et:

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B\right)e^{\lambda_2 t} = \frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt}$$

Lähtudes viimasest kahest võrdusest, saame:

$$\frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Integreerime:

$$\int_{N_{B,t}}^{N_{B,0}} dN_B e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} \int_0^t e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt$$

$$N_{B,t} e^{\lambda_2 t} - N_{B,0} e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled $e^{-\lambda_2 t}$-ga läbi:

$$N_{B,t} - N_{B,0} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1}{e^{\lambda_2 t}} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Võrrand lihtsustub oluliselt, kui $N_{B,0}$ võrdub nulliga:

$$N_{B,t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Aeg, mille jooksul B hulk saavutab maksimumi, vastab tingimusele $dN_B/dt = 0$. Asendame saadud võrdust võrrandisse:

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t},$$

Saame:

$$0 + \lambda_2 \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t_{max}} - e^{-\lambda_2 t_{max}}\right) = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t_{max}}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t_{max}} - e^{-\lambda_2 t_{max}}\right) = e^{-\lambda_1 t_{max}}$$

$$\lambda_2\left(e^{-\lambda_1 t_{max}} - e^{-\lambda_2 t_{max}}\right) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-\lambda_1 t_{max}}$$

$$\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_{max}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_{max}} = e^{-\lambda_1 t_{max}} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_{max}}$$

$$e^{\lambda_2 - \lambda_1 t_{max}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Tulemuse logaritmimisel tekib uus valem:

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Maksimaalne võimalik B hulk on:

$$N_{B,max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}N_{A,0}e^{-\lambda_1 t_{max}}$$

$$N_{B,max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}N_{A,0}e^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$N_{B,max} = N_{A,0}\exp\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$$

Kui $N_{C,0}$ on samuti võrdne nulliga, siis võrdus $N_{A,0} = N_{A,t} + N_{B,t} + N_{C,t}$ on tõene. Järelikult:

$$N_{C,t} = N_{A,0} - \frac{N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Ilmselgelt ei saa seda võrrandit kasutada, kui $\lambda_1 = \lambda_2$.