

Radioaktiivse lagunemise kineetika

Aatomituumade lagunemisreaktsiooni on esimest järku, st radioaktiivsete tuumade arv N muutub ajas radioaktiivse lagunemise seaduse kohaselt (eksponentsiaalselt):

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t},$$

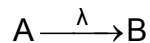
где число ядер в моменты времени соответственно, а константа распада, имеющая смысл вероятности распада в единицу времени:

kus N_t ja N_0 on tuumade arv vastavalt ajahetkel $T = t$ ja $T = 0$; λ on lagunemise konstant, mis on ekvivalentne radioaktiivse lagunemise ühikkiirusega (ja ka lagunemise tõenäosusega ühikulise aja jooksul):

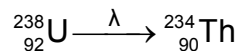
$$-\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = \lambda,$$

miinusmärk näitab, et radioaktiivsete tuumade arv N väheneb aja jooksul.

Otsene lagunemisreaktsioon



Näited:



Lagunemise kiiruse võrrand diferentsiaalsel kujul on:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda N_A$$

Integreerides, saame:

$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} \frac{dN_A}{N_A} = -\int_0^t \lambda dt$$

$$\ln \frac{N_{A,t}}{N_{A,0}} = -\lambda t$$

Nüüd võtame eksponenti võrrandi mõlemad pooled ja saame juba tuttava valemi:

$$N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda t}$$

Graafikul on kujutatud radioaktiivse $^{242}_{95}\text{Am}$ massi muutumine. On näha, et teatud aja jooksul ($T_{1/2} = 16,02 \text{ h}$) väheneb $^{242}_{95}\text{Am}$ mass täpselt poole võrra; seda aega nimetatakse poolestusajaks. Radioaktiivse lagunemise seaduse põhjal leiame poolestusaja seost lagunemiskonstandiga:

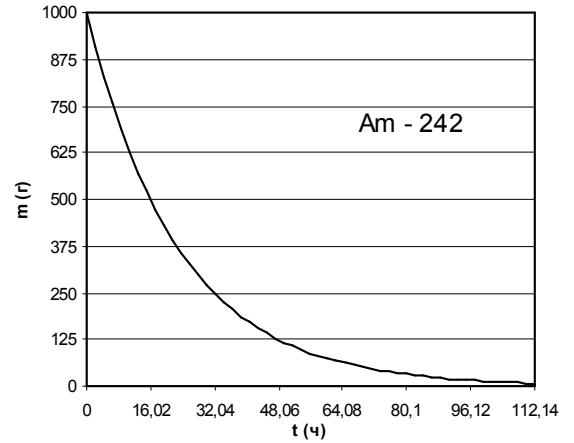
$$N_{T_{1/2}} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{N_{T_{1/2}}}{N_0} = -\lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \ln \frac{N_0}{N_{T_{1/2}}} = \lambda \cdot T_{1/2},$$

Kuna poolestusaeg on defineeritud kui aeg, mille jooksul radioaktiivse aine hulk (mass, aktiivsus) väheneb täpselt poole võrra, siis:

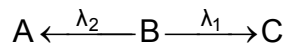
$$\ln 2 = \lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0,693}{T_{1/2}},$$

Poolestusaja kõrval eksisteerib veel üks suurus - τ , mis iseloomustab radioaktiivse nukliidi keskmist eksisteerimisaega (eluaega):

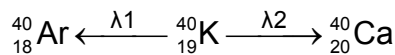
$$\lambda = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 T_{1/2}.$$



Paralleelsed lagunemisreaktsioonid



Näited:



Lagunemiskiiruse võrrand diferentsiaalsel kujul:

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_B + \lambda_2 N_B$$

ehk

$$-\frac{dN_B}{dt} = \lambda N_B,$$

kus $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_B = \lambda_1 N_{B,0} e^{-\lambda t} \quad \text{и} \quad \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B = \lambda_2 N_{B,0} e^{-\lambda t}$$

Integreerides, saame:

$$\int_{N_{A,0}}^{N_{A,t}} dN_A = \lambda_1 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt \quad \text{и} \quad \int_{N_{C,0}}^{N_{C,t}} dN_C = \lambda_2 N_{B,0} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

$$N_{A,t} = N_{A,0} + \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{и} \quad N_{C,t} = N_{C,0} + \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t})$$

Reeglina on $N_{A,0}$ ja $N_{C,0}$ võrdsed nulliga, siis:

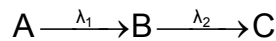
$$N_{A,t} = \frac{\lambda_1}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{и} \quad N_{C,t} = \frac{\lambda_2}{\lambda} N_{B,0} (1 - e^{-\lambda t})$$

$N_{A,0}$ ja $N_{C,0}$ suhe on:

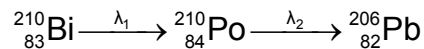
$$\frac{N_{C,t}}{N_{A,t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Vastavalt saadud võrrandile sõltub produktide kontsentratsioonide suhe lagunemiskonstantidest ja ei sõltu ajast (mis on väga oluline!).

Ahelreaktsioonid



Näited:



Diferentsiaalsel kujul:

$$-\frac{dN_A}{dt} = \lambda_1 N_A, \quad \frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_A - \lambda_2 N_B \quad \text{и} \quad \frac{dN_C}{dt} = \lambda_2 N_B.$$

A lagunemine B-ks on otsene reaktsioon, seetõttu:

$$N_{A,t} = N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}$$

Asendades saadud võrdust võrrandisse (2), saame:

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_B$$

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t}$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled $e^{\lambda_2 t}$ -ga:

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B\right) e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}$$

Matemaatiliselt võib tõestada, et:

$$\left(\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B\right) e^{\lambda_2 t} = \frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt}$$

Lähtudes viimasest kahest võrdusest, saame:

$$\frac{dN_B e^{\lambda_2 t}}{dt} = \lambda_1 N_{A,0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Integreerime:

$$\int_{N_{B,t}}^{N_{B,0}} dN_B e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{A,0} \int_0^t e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt$$

$$N_{B,t} e^{\lambda_2 t} - N_{B,0} e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled $e^{-\lambda_2 t}$ -ga läbi:

$$N_{B,t} - N_{B,0} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1}{e^{\lambda_2 t}} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Võrrand lihtsustub oluliselt, kui $N_{B,0}$ võrdub nulliga:

$$N_{B,t} = \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Aeg, mille jooksul B hulk saavutab maksimumi, vastab tingimusele $dN_B/dt = 0$. Asendame saadud võrdust võrrandisse:

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t},$$

Saame:

$$0 + \lambda_2 \frac{\lambda_1 N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = \lambda_1 N_{A,0} e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\lambda_2 (e^{-\lambda_1 t_{\max}} - e^{-\lambda_2 t_{\max}}) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_{\max}} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_{\max}} = e^{-\lambda_1 t_{\max}} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$e^{\lambda_2 - \lambda_1 t_{\max}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Tulemuse logaritmimeisel tekib uus valem:

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Maksimaalne võimalik B hulk on:

$$N_{B,\max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{A,0} e^{-\lambda_1 t_{\max}}$$

$$N_{B,\max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{A,0} e^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$N_{B,\max} = N_{A,0} \exp\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$$

Kui $N_{C,0}$ on samuti võrdne nulliga, siis võrdus $N_{A,0} = N_{A,t} + N_{B,t} + N_{C,t}$ on tõene. Järelikult:

$$N_{C,t} = N_{A,0} - \frac{N_{A,0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t})$$

Ilmselgelt ei saa seda võrrandit kasutada, kui $\lambda_1 = \lambda_2$.